

## Capítulo 4: Filtros digitales

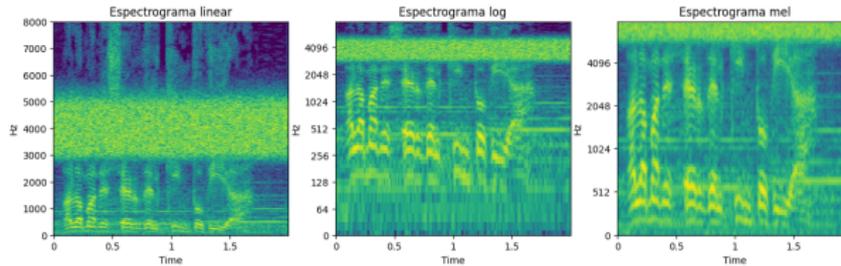
Un filtro digital es un sistema que manipula señales digitales para alterar ciertas características de estas: amplitud, frecuencia y/o fase

### Aplicaciones

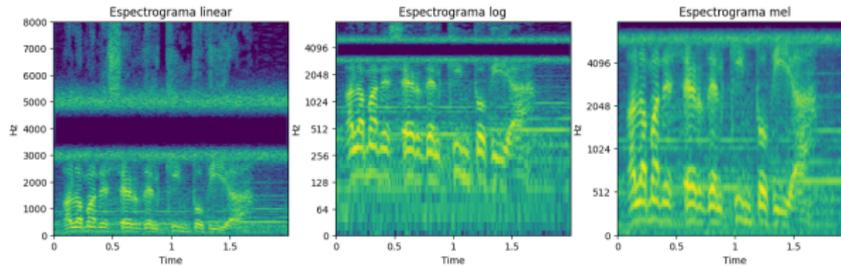
- Mejorar calidad de una señal (retirar ruido)
- Extraer información de una señal
- Separar señales mezcladas
- Extraer información de un rango de frecuencias específico (**Bancos de filtros**)

# Ejemplos

Ruido en alta frecuencia (3k-4k Hz)



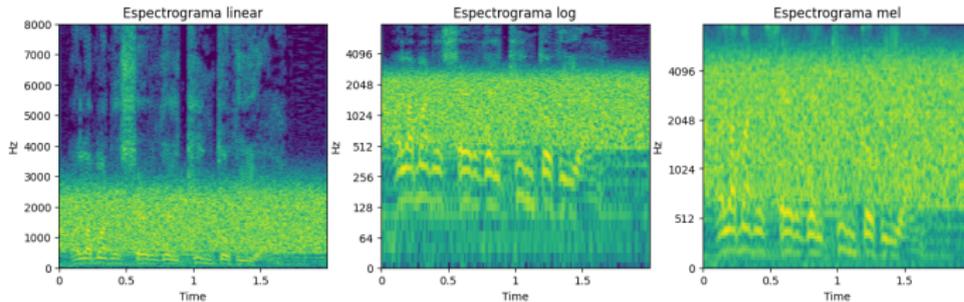
Despues del filtro



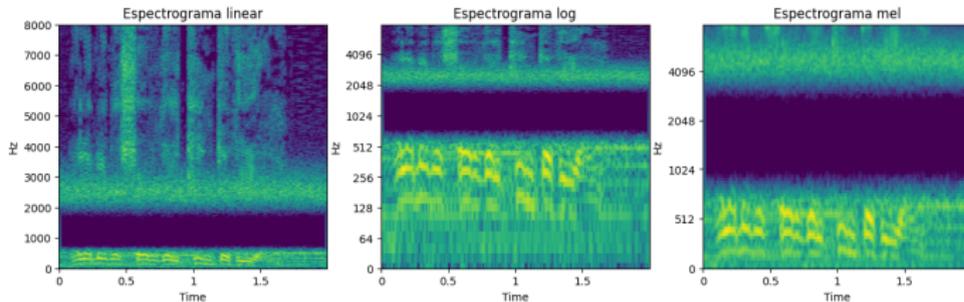
[Escuchar audios](#)

# Ejemplos

Ruido en baja frecuencia (500-2500 Hz)



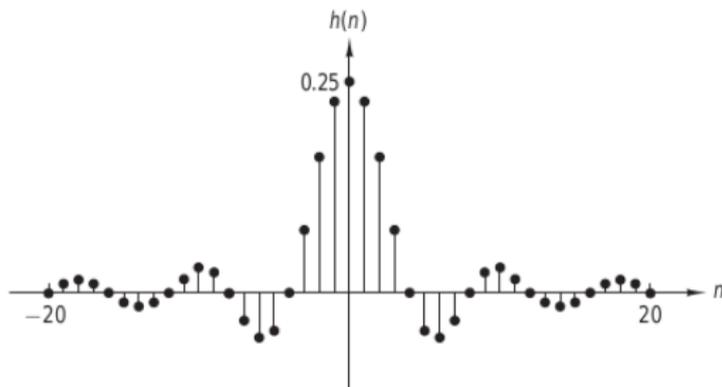
Despues del filtro



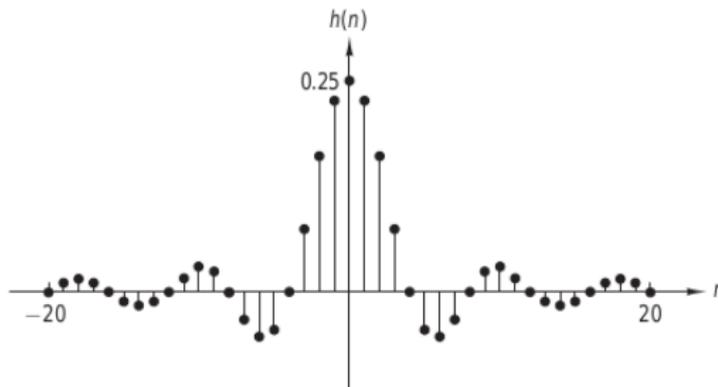
# Filtro ideal

$$\text{Respuesta en frecuencia } H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{Respuesta en el tiempo } h(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\omega_c n} & n \neq 0 \end{cases}$$



# Filtro ideal



No realizable:

- $h(n)$  es una señal no causal
- $h(n)$  toma  $\infty$  valores

# Filtro ideal

Primero solucionemos el problema de la causalidad

¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer una respuesta en frecuencia  $H(\omega)$  para que el filtro resultante sea causal (realizable)?

## Teorema de Paley-Wiener:

Si  $h(n)$  tiene energía finita y  $h(n) = 0$  para  $n < 0$  (es decir  $h(n)$  es causal), entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln |H(\omega)|| d\omega < \infty$$

Entonces, ¿Como debe ser  $|H(\omega)|$  para que se cumpla el teorema?

# Filtro ideal

Primero solucionemos el problema de la causalidad

¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer una respuesta en frecuencia  $H(\omega)$  para que el filtro resultante sea causal (realizable)?

## Teorema de Paley-Wiener:

Si  $h(n)$  tiene energía finita y  $h(n) = 0$  para  $n < 0$  (es decir  $h(n)$  es causal), entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln |H(\omega)|| d\omega < \infty$$

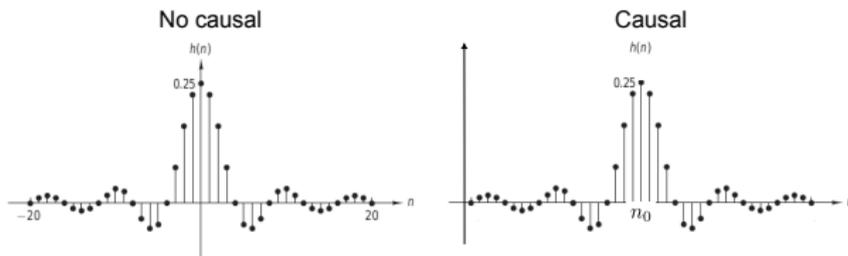
Entonces, ¿Como debe ser  $|H(\omega)|$  para que se cumpla el teorema?

$|H(\omega)|$  puede ser cero para algunas frecuencias, pero no puede ser cero en ninguna banda finita de frecuencias. En consecuencia, **cualquier filtro ideal no puede ser causal.**

# Filtro ideal

Es posible considerar un retardo grande  $n_0$  en  $h(n)$  y redefinir  $h(n)$  para que sea causal:

$$h(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\omega_c n} & 0 \leq n < n_0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} & n = n_0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\omega_c n} & n_0 < n < 2n_0 \end{cases}$$



Truncamiento  $\Rightarrow$  Fenómeno de Gibbs

# Filtro ideal

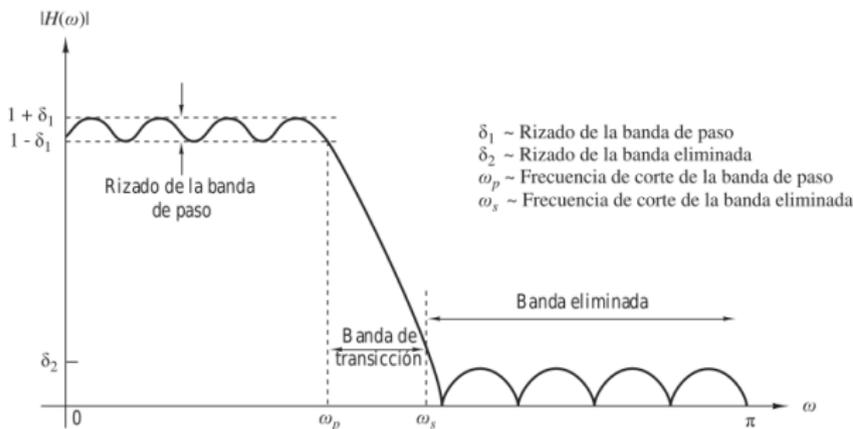
Los filtros selectivos en frecuencia no pueden ser no causales

## Implicaciones de la causalidad:

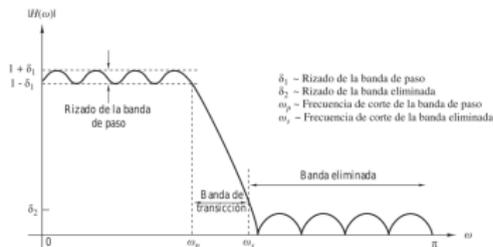
- la respuesta en frecuencia  $H(\omega)$  no puede ser cero excepto en un conjunto finito de puntos de frecuencia
- $|H(\omega)|$  no puede ser constante en cualquier intervalo finito de frecuencia y la transición de la banda de paso a la banda eliminada no puede ser infinitamente abrupta (esto es una consecuencia del fenómeno de Gibbs, que resulta del truncamiento de  $h(n)$  para conseguir la causalidad)
- las componentes real e imaginaria de  $\check{H}(\omega)$  son **interdependientes** y están relacionadas por la transformada discreta de Hilbert. En consecuencia, el  $|H(\omega)|$  y la fase de  $H(\omega)$  no se pueden elegir arbitrariamente.

# Diseño de filtros digitales

- ¿La respuesta en frecuencia de los filtros ideales es absolutamente necesaria?
- ¿Podemos implementar filtros causales que puedan **aproximarse** a filtros ideales?
- ¿Podemos lograr una buena aproximación?
- ¿Que es una buena aproximación?



# Diseño de filtros digitales



En cualquier problema de diseño de filtros podemos especificar:

- El rizado máximo de la banda de paso tolerable
- El rizado máximo de la banda eliminada tolerable
- La frecuencia de corte de la banda eliminada

Basados en estas especificaciones, podemos seleccionar los parámetros  $a_k$  y  $b_k$  de la respuesta en frecuencia, dada por la ecuación en diferencias:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n - k) + \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n - k)$$

# Diseño de filtros digitales

## Filtros FIR

- Pueden diseñarse con **fase lineal**.
- Son filtros **no recursivos**
- Son siempre estables al no tener **realimentaciones**
- Su respuesta al impulso coincide con el vector de coeficiente  $b_i$

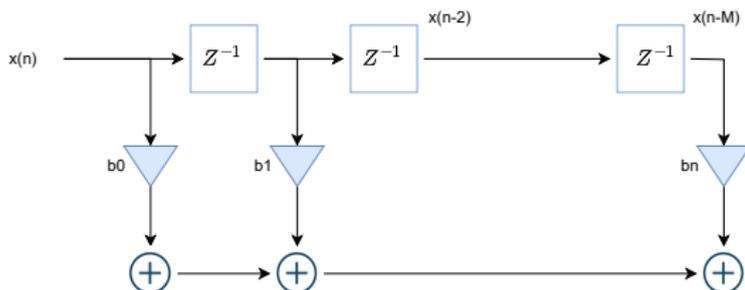
$$y_n = \sum_{k=0}^M b_k x(n - k)$$

Los coeficientes  $a_0$  desaparecen de la ecuación porque no se tienen realimentaciones

**Fase lineal**  $\Rightarrow$  Todas las componentes de frecuencias sufren la misma cantidad de retraso  $\therefore$  no hay distorsión de fase

# Diseño de filtros digitales

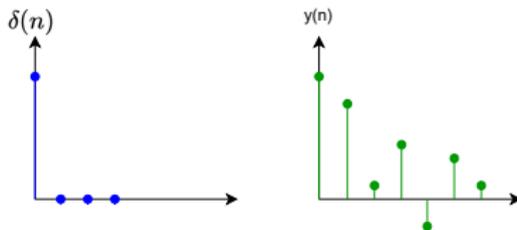
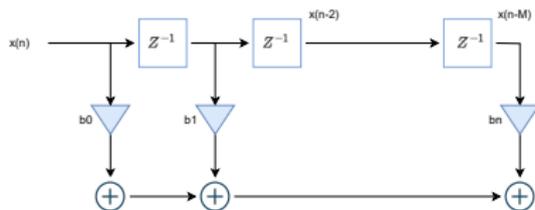
## Esquema del filtro FIR:



- $x(n)$ : Secuencia de entrada
- $x(n - M)$ : Secuencia retrasada M muestras
- $y(n)$ : Secuencia de salida (x filtrada)
- $Z^{-1}$  Retardo de una muestra
- $b_n$ : Coeficientes del filtro (no recursivo)

# Diseño de filtros digitales

## Esquema del filtro FIR:



**Respuesta natural del filtro**  $h(n) = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_N]$

# Diseño de filtros digitales

## Diseño de filtros FIR: técnica de enventanado

Consiste en partir de la especificación de la respuesta en frecuencia deseada  $H_d(\omega)$  y usando la transformada inversa de Fourier es posible determinar  $h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

Ya vimos que  $h_d(n)$  es infinita en duración y tiene que truncarse en algún punto, por ejemplo en  $n = M - 1$  para proporcionar un filtro FIR de longitud  $M$ .

Podemos truncar  $h_d(n)$  a una longitud  $M - 1$  usando una ventana rectangular definida como:

$$w(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, \dots, M - 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

donde la respuesta al impulso (respuesta natural) es:

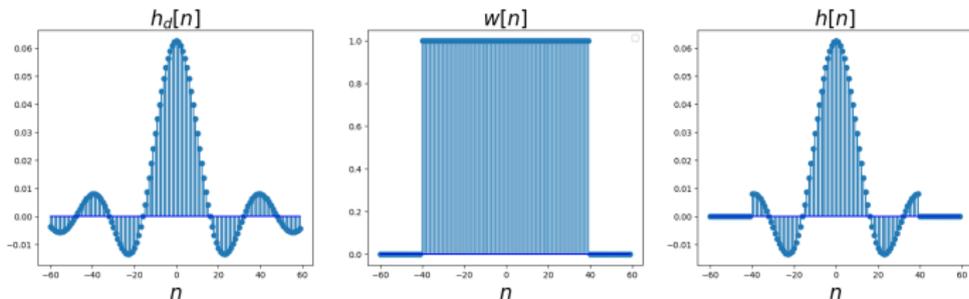
$$h(n) = h_d(n)w(n) = \begin{cases} h_d(n) & n = 0, 1, \dots, M - 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

# Diseño de filtros digitales

Filtro pasa-bajas con frecuencia de corte en  $f_c = 1k$  Hz considerando  $M = 40$  y una  $f_s = 33k$

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega_c| < \omega \leq \pi \\ 0 & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases} \quad h_d(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\text{sen}(\omega_c n)}{\omega_c n} & n \neq 0 \end{cases}$$

$$w(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, \dots, 39 \\ 0 & e.o.c \end{cases} \quad h(n) = \begin{cases} h_d(n) & n = 0, 1, \dots, 39 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$



$$\omega_c = \frac{2\pi f_c}{f_s} \Rightarrow \text{frecuencia de corte normalizada (rad)}$$

# Diseño de filtros digitales

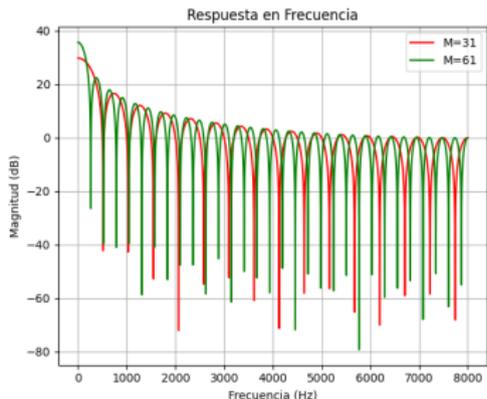
## Efecto de la función ventana sobre $H_d(\omega)$

Recuerde que multiplicar la función de ventana  $w(n)$  por  $h_d(n)$  es equivalente a **convolucionar**  $H_d(\omega)$  con  $W(\omega)$ , donde  $W(\omega)$  es la representación en el dominio de la frecuencia (transformada de Fourier) de la función de ventana, es decir,

$$W(\omega) = \sum_{n=1}^{M-1} w(n)e^{-j\omega n} \quad H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(v)W(\omega - v)$$

$$|W(\omega)| = \frac{|\text{sen}(\frac{\omega M}{2})|}{|\text{sen}(\frac{\omega}{2})|}, \quad \pi \leq \omega \leq \pi$$

# Diseño de filtros digitales



Cuando  $M$  aumenta el lóbulo principal se hace más estrecho.

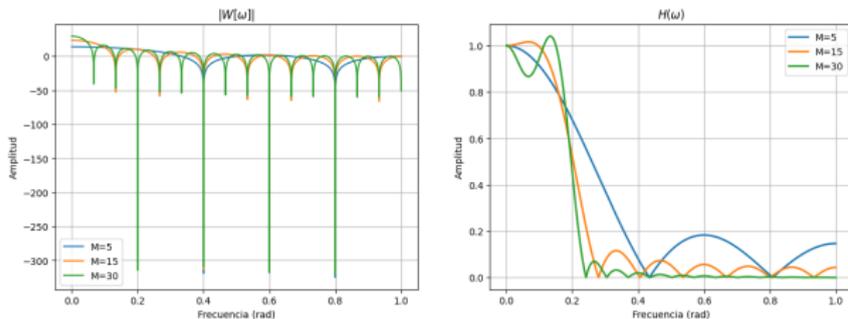
La altura de los lóbulos secundarios de  $|W(\omega)|$  es ligeramente mayor. De hecho el área bajo el lóbulo secundario permanece constante cuando se produce un incremento de  $M$  y como el ancho de los lóbulos secundarios disminuye cuando aumenta  $M$  **la altura del lóbulo secundario debe aumentar cuando aumenta  $M$ .**

Este comportamiento característico no es evidente en el gráfico porque  $W(\omega)$  se ha normalizado mediante  $M$

# Diseño de filtros digitales

## Efecto de la función ventana rectangular sobre $H_d(\omega)$

- La convolución de  $H_d(\omega)$  con  $W(\omega)$  tiene el efecto de suavizar  $H_d(\omega)$ . Cuando  $M$  aumenta,  $W(\omega)$  se hace más estrecha y el suavizado proporcionado por  $W(\omega)$  se reduce.
- El ancho del lóbulo principal define la banda de transición del filtro.
- Los lóbulos secundarios de  $W(\omega)$  dan lugar a una serie de efectos de rizado no deseados en  $H(\omega)$



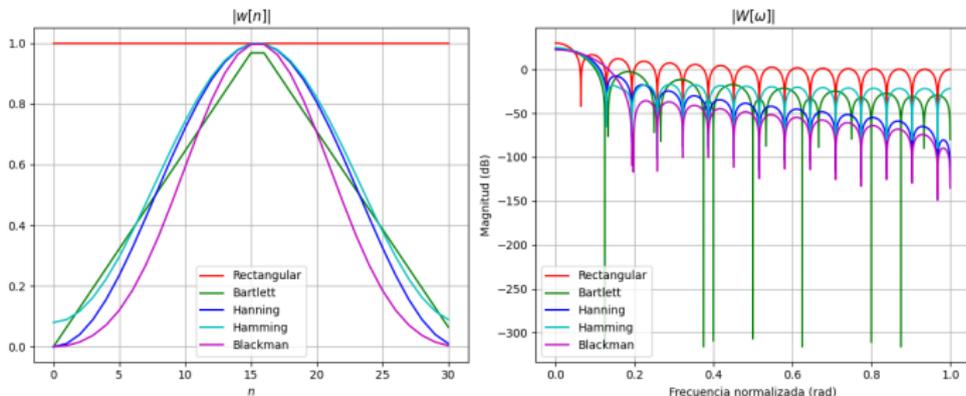
## Diseño de filtros digitales

Es posible reducir la altura de estos lóbulos secundarios usando ventanas que no contengan discontinuidades abruptas en sus características en el dominio en el tiempo

Tipo de ventana	Secuencia en el dominio del tiempo $h(n), 0 \leq n \leq M - 1$
Bartlett (triangular)	$1 - \frac{2 \left  n - \frac{M-1}{2} \right }{M-1}$
Blackman	$0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}$
Hamming	$0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}$
Hanning	$\frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi n}{M-1} \right)$
Kaiser	$\frac{l_o \left[ \alpha \sqrt{\left( \frac{M-1}{2} \right)^2 - \left( n - \frac{M-1}{2} \right)^2} \right]}{l_o \left[ \alpha \left( \frac{M-1}{2} \right) \right]}$

# Diseño de filtros digitales

Todas estas funciones de ventana tienen lóbulos secundarios significativamente más pequeños comparados con los de la ventana rectangular. Sin embargo, para el mismo valor de  $M$ , la anchura del lóbulo principal también es mayor. Por lo tanto estas funciones ventana proporcionan más suavizado en el dominio de la frecuencia mediante la convolución lo que produce que la región de transición de la respuesta del filtro FIR es más ancha



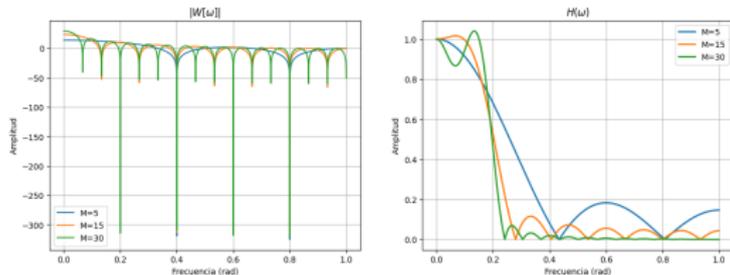
# Diseño de filtros digitales

El ancho del lóbulo principal depende de la ventana y del orden del filtro

Tipo de ventana	Anchura aproximada de la región de transición del lóbulo principal	Pico del lóbulo secundario (dB)
Rectangular	$4\pi/M$	-13
Bartlett	$8\pi/M$	-25
Hanning	$8\pi/M$	-31
Hamming	$8\pi/M$	-41
Blackman	$12\pi/M$	-57

# Diseño de filtros digitales

## Ejemplo con ventana de Rectangular



## Ejemplo con ventana de Hamming

