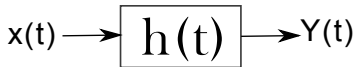


Procesos aleatorios y sistemas LTI

En sistemas de comunicación, la señal transmitida suele contaminarse con ruido durante su propagación, por lo que es necesario diseñar filtros que permitan recuperar, en el receptor, una versión lo más cercana posible a la señal original.

Otra aplicación importante aparece en el análisis de fenómenos naturales, los cuales pueden modelarse como procesos estocásticos. En estos casos, puede ser de interés centrarse en componentes específicas del proceso, por ejemplo, en determinados rangos de frecuencia. El uso de filtros permite atenuar aquellas componentes no deseadas y resaltar la información de interés dentro del PA.

Dado que los filtros se pueden modelar como sistemas LTI, tiene sentido abordar el tema de cómo estos sistemas cambian el espectro de potencia de las señales de información cuando éstas son contaminadas con ruido.



Dado que el sistema es LTI entonces se cumple que:

$$L[a_1X_1(t) + a_2X_2(t) + \dots + a_nX_n(t)] = a_1L[X_1(t)] + \dots + a_nL[X_n(t)]$$

y

$$\forall d > 0, \text{ si } Y(t) = L[X(t)], \text{ entonces } Y(t - d) = L[X(t - d)]$$

Además recordemos del capítulo anterior que:

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Es la integral de **convolución**.

Y la función de transferencia del sistema LTI es la transformada de Fourier de su respuesta al impulso:

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$$

Para señales deterministas es posible aplicar la propiedad de convolución de la transformada de Fourier, tal que:

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

Sin embargo, la transformada de Fourier para señales aleatorias tiene problemas de convergencia (siendo estrictos, no existe).

A pesar de esto, podemos aplicar la transformada de Fourier para describir a $H(f)$ como la relación $\frac{Y(f)}{X(f)}$. Recordemos que la clave es cortar la señal para analizarla por intervalos.

→ Podemos analizar cómo es modificada o transferida la **potencia** de una VA $X(f)$ al pasar por un sistema LTI.

Proposición: Propiedades estadísticas de la salida de un sistema LTI

Nuevamente asumimos que $X(t)$ es un PA WSS.

Sea L un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$ y función de transferencia $H(f)$.

Suponga que $X(f)$ es un PA WSS que está a la entrada del sistema, tal que $Y(t) = L[X(t)]$ es la salida.

Entonces $X(t)$ y $Y(t)$ son PAs WSS conjuntamente y tienen las siguientes propiedades:

$$1. \mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$$

$$2. R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

$$3. P_Y = R_{YY}(0)$$

$$4. R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau)$$

$$1. \mu_Y = \mu_X H(0)$$

$$2. S_{YY}(f) = S_{XX}(f) |H(f)|^2$$

$|H(f)|^2$ es la potencia del sistema LTI.

$$3. P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_{YY}(f) df$$

$$4. S_{XY}(f) = S_{XX}(f) H(f)$$

Ejercicio: Considere un circuito RC tal que:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

RC es la constante de tiempo del sistema.

Suponga que la entrada a este sistema es ruido blanco tal que

$$S_{XX}(f) = \frac{N_0}{2} [\text{W/Hz}].$$

Encuentre:

- (a) La media de la señal a la salida del sistema.
- (b) La función de transferencia $H(f)$ del sistema.
- (c) La potencia a la salida del sistema, P_y .

$$\text{Hint: } \mathcal{F}[t^k e^{-at} u(t)], \quad a > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots = \frac{k!}{(a + j2\pi f)^{k+1}}$$

Ejercicio: Considere el sistema LTI cuya respuesta al impulso es

$$h(t) = t^2 e^{-t} u(t).$$

La entrada al sistema es un PA dado por $X(t) = V + 500 \cos(2 \times 10^6 \pi t + \Theta)$, donde V y Θ son dos VA independientes tales que:

$$\Theta \sim \text{Unif}(-\pi, \pi], \mu_V = 60 \text{ y } \sigma_V^2 = 12.$$

Además $X(t)$ es WSS con $\mu_X = 60$ y

$$R_{XX}(\tau) = 3612 + 125000 \cos(2 \times 10^6 \pi \tau).$$

La salida del sistema cuando se aplica $X(t)$ está dada por $Y(t)$. Encuentre:

- (a) La densidad espectral de potencia de $X(t)$.
- (b) La función de transferencia del sistema: $H(f)$.
- (c) μ_Y , la PSD de $Y(t)$ y la potencia promedio P_Y .

Filtros ideales

Filtrar $\Rightarrow$ eliminar frecuencias para...

Nosotros queremos eliminar el ruido que esté presente en bandas de frecuencia específicas.

Definición: Un sistema LTI es un filtro ideal si su función de transferencia de potencia es:

$$|H(f)|^2 = \begin{cases} 1 & f \in F_{\text{pass}} \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

F_{pass} son las frecuencias que deja pasar el filtro.

Entonces:

$$S_{YY}(f) = S_{XX}(f)|H(f)|^2 = \begin{cases} S_{XX}(f) & f \in F_{\text{pass}} \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

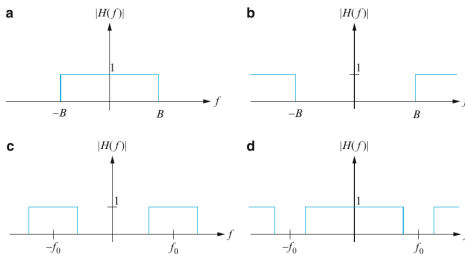


Figura tomada de (Carlton, 2017)

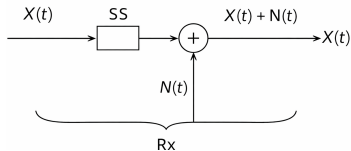
Ejercicio: Una VA WSS con función de autocorrelación

$R_{XX}(\tau) = 250 + 1500e^{(-1,6 \times 10^9 \tau^2)}$ Se pasa a través de un filtro pasabajas ideal con $F_c = 10\text{kHz}$.

Encuentre la densidad de potencia a la entrada y a la salida, así como la potencia promedio a la salida del filtro.

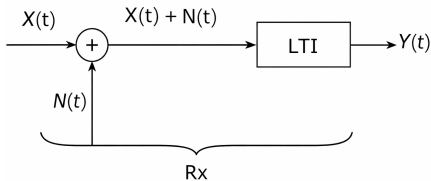
Hint: $\mathcal{F} \left[e^{-\alpha t^2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{(\pi f)^2}{\alpha}}$, donde $\text{Re}(\alpha) > 0$.

Señal más (+) ruido



$N(t)$ es ruido blanco, $X(t)$ y $N(t)$ son independientes y se asumen WSS, además $E[N(t)] = 0$.

Ahora pensemos en que tenemos un sistema LTI (filtro) en el RX tal que ayudará a reducir el ruido:



La media de la señal de entrada al filtro (sistema LTI) es:

$$E[X(t) + N(t)] = E[X(t)] + \cancel{E[N(t)]} \overset{0}{=} \underbrace{\mu_X}_{\text{Nivel DC de la entrada}}$$

Ahora encontremos la función de autocorrelación a la entrada del filtro $R_{in}(\tau)$:

$$R_{in}(\tau) = E[(X(t) + N(t))(X(t + \tau) + N(t + \tau))]$$

Donde $X(t)$ y $N(t)$ son independientes, entonces:

$$= \underbrace{E[X(t)X(t + \tau)]}_{R_{XX}(\tau)} + \cancel{E[X(t)N(t + \tau)]} \overset{0}{=} \cancel{E[N(t)X(t + \tau)]} \overset{0}{=} \underbrace{E[N(t)N(t + \tau)]}_{R_{NN}(\tau)}$$

$\therefore$

$$R_{in}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{NN}(\tau)$$

Podemos ahora aplicar el teorema de Wiener-Kinchin-Einstein para encontrar $S_{in}(f)$.

$$S_{in}(f) = \mathcal{F}[R_{in}(\tau)] = \mathcal{F}[R_{XX}(\tau) + R_{NN}(\tau)]$$

$$S_{in}(f) = S_{XX}(f) + S_{NN}(f)$$

Ahora podemos aplicar un filtro (sistema LTI) llamado L .

$$\Rightarrow L[X(t) + N(t)] = \underbrace{L[X(t)] + L[N(t)]}_{\text{PA independientes y WSS}}$$

Supongamos que la función de transferencia del filtro es $H(f)$, entonces a la salida tendremos:

$$\mu_{L[X]} = E[L[X(t)]] = \mu_X H(0)$$

$$\mu_{L[N]} = E[L[N(t)]] = \cancel{\mu_N} H(0) = 0$$

Por linealidad, a la salida del filtro: $\mu_X H(0) + \cancel{\mu_N} H(0) = \mu_X H(0)$

De forma similar:

$$S_{\text{out}}(f) = S_{\text{in}}(f) |H(f)|^2$$

$$S_{\text{out}}(f) = S_{XX}(f) |H(f)|^2 + S_{NN}(f) |H(f)|^2$$

La PSD de la salida incluye la PSD de la entrada y la PSD del ruido.

Estudiemos ahora la relación entre la potencia de la señal (a la entrada y a la salida del filtro) vs. la potencia del ruido (SNR):

$$\text{SNR}_{\text{in}} = \frac{P_X}{P_N} \quad \text{vs.} \quad \text{SNR}_{\text{out}} = \frac{P_{L[X]}}{P_{L[N]}}$$

Se dirá que el filtro es “bueno” siempre que: $\text{SNR}_{\text{out}} > \text{SNR}_{\text{in}}$

Ejercicio: Suponga que a una VA $X(t)$ se le suma ruido $N(t)$ blanco y Gaussiano durante una transmisión por un canal de comunicaciones.

Asuma que $X(t)$ y $N(t)$ son independientes y WSS.

Las funciones de autocorrelación para la señal y el ruido son:

$$R_{XX}(\tau) = 2400 + 45000 \text{sinc}^2(1800\tau) \text{ y}$$

$$R_{NN}(\tau) = 1500e^{-10000|\tau|} \Rightarrow P_N = R_{XX}(0) = 1500\text{W}.$$

Para filtrar el ruido cuando se tiene $X(t) + N(t)$, se aplica un filtro ideal pasabajas con $F_c = 1800\text{Hz}$.

Encuentre las potencias de entrada y salida y analice la calidad del filtro aplicado.

Ancho de banda equivalente de ruido

Cuando un ruido blanco Gaussiano pasa a través de un filtro, la salida será Gaussiana, pero no blanca, pues el filtro alterará las propiedades espectrales de la entrada, tal que:

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2$$

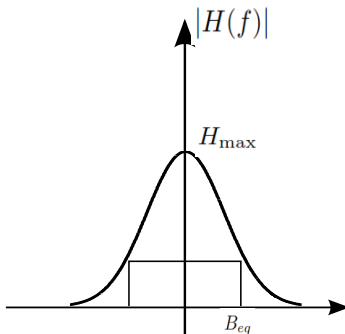
El contenido de potencia de la salida será:

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Para encontrar $\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$ es necesario definir el ancho de banda equivalente de ruido (B_{eq}), así:

$$B_{eq} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{2H_{\max}^2}$$

donde $H_{\max}$ es el máximo de $|H(f)|$ en el filtro pasabajas.
Típicamente:



$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P_Y &= \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \\ &= \frac{N_0}{2} \times \underbrace{2 B_{eq} H_{\max}^2} \end{aligned}$$

$\therefore$ conociendo B_{eq} y la respuesta en frecuencia del filtro, es posible conocer la potencia del ruido de salida del filtro.